6. Nullstellen, Definitionslücken und Parameter (1)

Enthalten gebrat. Fuen Parameter, so beschränkt man sich bei der Untersuchung zumeist auf die Anzahl und Lage der Nullstellen sowie die Art und Lage der Definitionslücken, jeweils in Abhängigkeit vom Parameter.
Das Augenmerk richtet sich darauf, welche Nullstellen kürzen und damit evtl. zu stetig behebbare Lücken werden bzw. die Anzahl der Nullstellen der Funktion verändern.
Das macht Fallunterscheidungen notwendig.

Dazu einige Beispiele:

- $f_a(x) = \frac{x-2a}{x-4}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
  An der Stelle $x_1 = 4$ ist i. A. eine Polstelle und an der Stelle $x_2 = 2a$ eine Nullstelle der Fu.
  Nun kann aber die **Zählernullstelle $x_Z = 2a$ auf die Polstelle $x_P = 4$ fallen, falls $a = 2$** ist.
  Dann ist die Funktion stetig fortsetzbar bei $x_P = 4$, hat keine Polstelle und auch keine Nullstelle mehr, weil sich beide „herauskürzen".
  Es ist $f_2(x) = 1$; $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ ohne Pol- und Nullstelle.

- $f_b(x) = \frac{(x-2b)(x+3)}{x-10}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{10\}$
  Im Allgemeinen: f hat zwei einfache NST $x_2 = 2b$ und $x_3 = -3$ und eine Polstelle $x_1 = 10$.
  1. Sonderfall: $x_2 = x_3 \Rightarrow b = -1{,}5$: f hat eine doppelte NST $x_3 = -3$ und einen Pol $x_1 = 10$.
  2. Sonderfall: $x_2 = x_1 \Rightarrow b = 5$: f hat eine einfache NST $x_3 = -3$ und keinen Pol.

- $f_c(x) = \frac{(2x-12)(x+3)}{x-c}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{c\}$
  Im Allgemeinen: f hat zwei einfache NST $x_2 = -6$ und $x_3 = -3$ und eine Polstelle $x_1 = c$.
  1. Sonderfall: $x_1 = x_2 \Rightarrow c = 6$: f hat eine einfache NST $x_3 = -3$ und keinen Pol.
  2. Sonderfall: $x_1 = x_3 \Rightarrow c = -3$: f hat eine einfache NST $x_2 = -6$ und keinen Pol.

Verfahren Sie ebenso mit folgenden Funktionen: (Alle Parameterwerte aus $\mathbb{R}$)

$f_1(x) = \frac{(2x-22)(3-x)}{x+d}$ $\quad f_2(x) = \frac{(2x-2e)(3-x)}{x+5}$ $\quad f_3(x) = \frac{-4(x-2f)(x-f)}{3x+30}$

$f_4(x) = \frac{5x-5g}{(x+5)^2}$ $\quad f_5(x) = \frac{(x-h)^2}{x+10}$ $\quad f_6(x) = \frac{x-j^2}{x+20}$

$f_7(x) = \frac{x^2-k^2}{(x+5)^2}$ $\quad f_8(x) = \frac{m-mx^2}{x+1}$ $\quad f_9(x) = \frac{n-nx^2}{x+n}$

$f_{10}(x) = 1 + \frac{2p^2}{x^2} + \frac{3p}{x}$ $\quad f_{11}(x) = \frac{(x+1)(x^2+2)(x^3+3)(x^4+4)}{x+q}$

$f_{12}(x) = \frac{(x-1)(x^2-2)(x^3-3)(x^4-4)}{x+r}$ $\quad f_{13}(x) = \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4}{x+s}$

$f_{14}(x) = \frac{\left((x-1)^3\right)^4 \left(x^2-4\right)^5}{\left(x^2-t^2\right)^{12}}$